XIX Межрегиональная олимпиада школьников по математике и криптографии

Задачи для 11 класса

Решение задачи 1

Сначала заметим, что если $N = pq$, где p и q – простые числа, то количество натуральных чисел, меньших N и взаимно простых с N равно $(p-1)(q-1)$ (обозначим это число $\varphi(N)$). Действительно, всего имеется $pq-1$ натуральных чисел, меньших N. Из них не взаимно-просты с N те числа, которые делятся либо на p, а именно $p, 2p, \ldots, (q-1)p$ (всего $(q-1)$ чисел), либо на q, это числа $q, 2q, \ldots, (p-1)q$ (всего $(p-1)$ чисел). Значит

$$\varphi(N) = pq - 1 - (p-1) - (q-1) = pq - p - q + 1 = (p-1)(q-1).$$

Получаем систему уравнений: $\begin{cases} pq = N \\ (p-1)(q-1) = \varphi(N) \end{cases}$; или $\begin{cases} pq = N \\ p+q = N+1-\varphi(N) \end{cases}$.

По теореме Виета получаем, что p и q – корни уравнения

$$x^2 - (N+1-\varphi(N))x + N = 0.$$

$N = 202718099$, $\varphi(N) = 202687920$, и уравнение имеет вид $x^2 - 30180x + 202718099 = 0$. Корень из дискриминанта равен $\sqrt{D} = \sqrt{99960004}$. Чтобы извлечь квадратный корень из этого числа, можно заметить, что результат должен быть немного меньше, чем 10000, причем последняя цифра в этом числе должна быть 2 или 8. Претендентами будут следующие числа: 9998, 9992, 9988, 9982… Последовательно возводя их в квадрат, находим: $9998^2 = 99960004$.
Итак:

$$x_1 = \frac{30180 - 9998}{2} = 10091 = p; \quad x_2 = \frac{30180 + 9998}{2} = 20089 = q.$$

Ответ: 10091 и 20089.

Решение задачи 2

Заметим, что 12=3+3+3+3, 13=7+3+3, 14=7+7. Таким образом, имеется три подряд идущих чисел, которые представимы в требуемом виде. Очевидно, что все последующие числа получаются прибавлением или к 12, или к 13, или к 14 нужного числа монет достоинством 3 единицы. Остается перебором чисел от 1 до 11 найти цены, которые нельзя устанавливать.

Приведем здесь еще одно решение этой задачи, несколько более «математизированное», но вместе с тем познавательное и поучительное.

Фактически надо найти числа *x*,*y* такие, что $ax + by = n$ (в данном случае, $a = 3,\ b = 7$). Уравнение $ax + by = n$, где НОД(*a*,*b*)=1, неразрешимо в неотрицательных целых числах *x*, *y* при $n = F(a,b) = ab - a - b$ и разрешимо при всех натуральных $n > F(a,b) = ab - a - b$. Число

$F(a,b)$ называется числом Фробениуса для пары (a,b). Чтобы заметить это покажем, что каждое из равносильных уравнений

$$ax+by=ab-a-b;\ a(x+1)+b(y+1)=ab;\ ax'+by'=c$$

не имеет натуральных решений x', y' при $c=ab$ и имеет такие решения при всех $c>ab$. Пусть при натуральных a, b, x', y' выполнено $ax'+by'=ab$. Тогда $ax'=b(a-y')$, т.е. x' делится на b (так как НОД(a,b)=1 и у чисел a,b нет общих делителей, кроме 1). Следовательно $x'\geq b$. Тогда $ax'+by'>ab$. Пусть $c>ab$, тогда, в силу условия НОД(a,b)=1, найдутся такие натуральные u,v (алгоритм Евклида), что $au-bv=c>ab$, т.е. $\frac{u}{b}-\frac{v}{a}>1$. Следовательно, найдется такое натуральное t, что $\frac{u}{b}>t>\frac{v}{a}$. Для этого t зададим натуральные числа x', y' следующим образом: $x'=u-bt, y'=at-v$. Тогда

$$ax'+by'=a(u-bt)+b(at-v)=au-bv=c.$$

Ответ: $\{1,2,4,5,8,11\}$.

Решение задачи 3

Пусть в двоичной системе счисления $A=(x_n,...,x_0)$. Тогда $A_1=(x_3,x_2,x_1,x_0)$, $A_2=(x_4,x_3,x_2,x_1)$, $A_3=(x_5,x_4,x_3,x_2)$. Следовательно,

$$a_1\oplus a_2=\left(A_1\oplus B\right)\oplus\left(A_2\oplus B\right)=A_1\oplus A_2=(x_3\oplus x_4,x_2\oplus x_3,x_1\oplus x_2,x_0\oplus x_1),$$

$$a_3\oplus a_2=\left(A_3\oplus B\right)\oplus\left(A_2\oplus B\right)=A_3\oplus A_2=(x_5\oplus x_4,x_4\oplus x_3,x_3\oplus x_2,x_2\oplus x_1).$$

Итак, если вычислить $a_1\oplus a_2$, то три младших бита $a_3\oplus a_2$ будут найдены, а старший бит будет произвольным.

Вычислим значение $a_1\oplus a_2$:

$$\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}.$$

Тогда возможные значения $\left(a_2\oplus a_3\right)$ имеют вид $\left(*,1,1,1\right)$, и $a_3=a_2\oplus(a_3\oplus a_2)$:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ * & 1 & 1 & 1 \\ \hline * & 1 & 0 & 1 \end{array}.$$

Итак, $a_3=13$, либо $a_3=5$. Можно убедиться в том, что оба варианты верны, если рассмотреть последовательности с параметрами $A=20$, либо $A=52$ и $B=0$.

Ответ: 13 и 5.

Решение задачи 4

Перемещаем указанное в условии слово по шифрованному тексту. При правильном расположении этого слова после вычитания слова из фрагмента шифрованного текста получим значения, образующие геометрическую прогрессию, от членов которой взяты остатки от деления на 31 (см. таблицу).

…	Ф	Б	К	П	Щ	С	Ь	…
	Р	А	В	Н	И	Н	Ы	
…	20	1	10	15	25	17	27	…
…	16	0	2	13	9	13	26	…
…	4	1	8	2	16	4	1	…

Ответ: МОРОЗНО**РАВНИНЫ**БЕЛЕЮТПОДСНЕГОМЧЕРНЕЕТСЯЛЕСВПЕРЕДИ; b=2, a=2.

Решение задачи 5

Одно из возможных решений указано в таблице

Номеру поездки соответствует город прибытия. Для того чтобы такая таблица соответствовала решению все комбинации, состоящие из четырех цифр, каждая из которых равна либо 0, либо 1, должны быть перечислены и последовательные комбинации должны отличаться в одном разряде.

№ поездки	Город
1.	0 0 0 1
2.	0 0 1 1
3.	0 0 1 0
4.	0 1 1 0
5.	0 1 1 1
6.	0 1 0 1
7.	0 1 0 0
8.	1 1 0 0
9.	1 1 0 1
10.	1 1 1 1
11.	1 1 1 0
12.	1 0 1 0
13.	1 0 1 1
14.	1 0 0 1
15.	1 0 0 0
16.	0 0 0 0

Решение задачи 6

Приведем геометрическое решение данной задачи.

а). Рассмотрим графики линий, задаваемых системой уравнений при $a>0$ (рис. 3):

$$\begin{cases} |y| = 1 - x \\ y = 2 - a|x| \end{cases}.$$

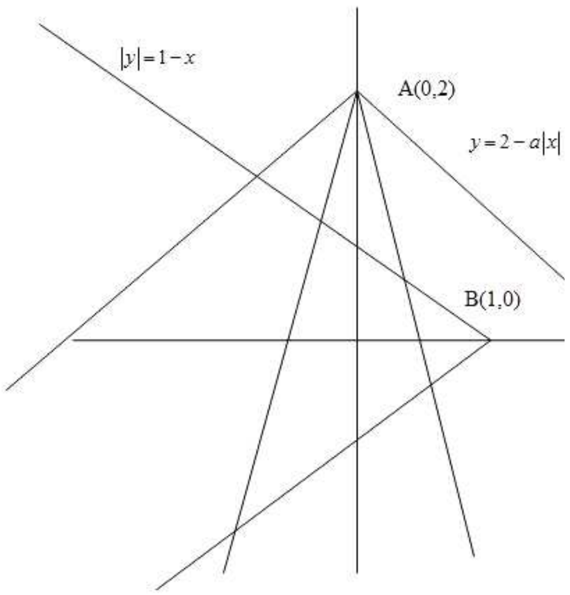

Рис. 3

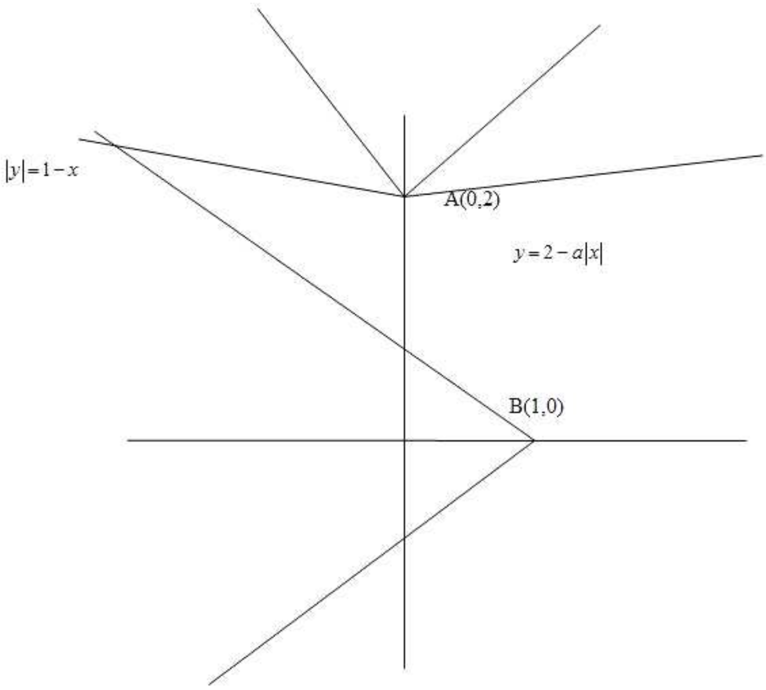

Рис. 4

Отсюда видно, что при $a>0$ система может иметь 1, 2, 3 или 4 решения.

Ровно 3 решения система имеет при тех $a>0$, при которых луч $y=2-ax, \quad x>0$ проходит через точку $B(1,0)$, то есть при $a=2$.

При $a>2$ луч $y=2-ax, \quad x>0$ пересекает линию $|y|=1-x$ в двух точках. Поэтому в данном случае система имеет ровно 4 решения.

При $0<a<2$ луч $y=2-ax, \quad x>0$ не пересекает линию $|y|=1-x$. Поэтому в данном случае система имеет 1 или 2 решения. Два решения получаются пересечением луча $y=2-a|x|, \quad x<0$ и линии $|y|=1-x$ в двух точках. Это может быть, если луч $y=2-a|x|, \quad x<0$, имеет угловой коэффициент (равный a) больший, чем 1.

Итак, при $1<a<2$ система имеет ровно 2 решения.

Если же $0<a\le 1$, то система имеет 1 решение.

б). Рассмотрим графики линий, задаваемых системой уравнений при $a<0$ (рис. 4). Из рисунка видно, что при $a<0$ система может иметь 0 или 1 решение.

Система не имеет решений при тех $a<0$, при которых луч $y=2-a|x|,\quad x<0$ не пересекает линию $|y|=1-x$, то есть при $a\le -1$.

При $-1<a<0$ луч $y=2-a|x|,\quad x<0$ пересекает линию $|y|=1-x$ ровно в одной точке. Поэтому в данном случае система имеет ровно 1 решение.

в). При $a=0$ система, очевидно, имеет ровно 1 решение, а именно $(-1;2)$.

Ответ:

- при $a\le -1$ нет решений;
- при $-1<a\le 1$ система имеет 1 решение;
- при $1<a<2$ система имеет 2 решения;
- при $a=2$ система имеет 3 решения;
- при $a>2$ система имеет 4 решения.